ALGÈBRE DES OPÉRATUERS AUX DIFFERENCES FINIES

BY

L. S. FRANK

ABSTRACT

An algebra of difference operators is introduced and some of their properties are studied. It is shown that this is a C^*-algebra and a differences analogue of Gårding's inequality is proved.

Introduction

Vu le rôle que les opérateurs aux différences finies jouent en Analyse Numérique et l'efficacité de leur application aux problèmes différentiels, une étude indépendante des propriétés algébriques et fonctionnelles de ces opérateurs s'imposait depuis un certain temps.

La théorie générale des opérateurs pseudodifférentiels ayant été mise au jour (cf. [4], [5]) et s'étant avérée efficace dans les applications on ressentait un besoin urgent d'avancer sur cette voie la théorie des opérateurs aux différences finies. Une étude indépendante de ces opérateurs était d'autant plus nécessaire que dans tout voisinage d'un "bon" problème différentiel il existe des "mauvaises" approximations ne conservant pas sur les réseaux les propriétés fondamentales du problème approximé.

On étudie dans cet article une algèbre des familles uniparamétriques d'opérateurs aux différences finies, introduite dans [1], ce qui permet d'établir sans trop de difficultés et dans toute sa généralité la théorie elliptique de ces opérateurs aux différences finies, la notion d'ellipticité de tels opérateurs ayant été introduite dans [1] et, indépendamment dans [7] pour les schémas aux différences finies approximant un opérateur élliptique différentiel. Les propriétés de l'algèbre étudiée sont, en quelque sorte, analogues à ceux de l'algèbre pseudodifférentiel de Kohn et Nirenberg [5] et de Hörmander [4]. Toutefois, il y a lieu de remarquer que le caractère discret et non-local des opérateurs aux différences finies, l'utilisation des espaces de fonctions de maille et la présence d'un petit paramètre (le pas du réseau) font que l'étude dans le cas discret diffère sensiblement du cas pseudodifférentiel. En établissant les formules de commutation et celles pour le symbole de l'opérateur conjugué, ainsi que l'analogue discret de l'inégalité de Gårding, les estimations des normes des opérateurs — restes sont données à partir des symboles des opérateurs correspondants. Une algèbre des opérateurs aux différences finies d'ordre 0 dans L^2 a été introduite dans l'article [9]. Cette algèbre avait un caractère spécial et était essentiellement adaptée à l'étude des systèmes différentiels hyperboliques du premier ordre.

Les opérateurs aux différences finies étudiés dans [6] et traités de manière plus simple dans [3], [8] n'étaient autres, en substance, que des approximations de l'unité. De tels opérateurs dits opérateurs de passage d'une valeur temporelle à une autre, ou, encore, opérateurs d'amplification, apparaîssent lorsqu'on discrétise les problèmes différentiels avec les données initiales.

L'algèbre introduite dans [1] et ci-dessous a pour objectif principal le développement de la théorie elliptique des opérateurs aux différences finies.

On va exposer brièvement le contenu de l'article. Les notations nécessaires sont données dans le §1. On introduit dans le §2 les classes des symboles matriciels et l'on définit ensuite, dans le §3, en partant de ces symboles, les familles uniparamètriques des opérateurs aux différences finies. Dans ce même §3, on démontre que ces familles sont uniformément bornées (par rapport au paramètre) en tant qu'opérateurs de $C_0^\infty(R_x^n)$ dans $C^\infty(R_x^n)$. On définit dans le §4 l'ordre d'un opérateur aux différences finies et l'on démontre qu'un tel opérateur est borné dans les espaces des fonctions de maille $H_s(0, h_0)$ correspondants (cf [2]). Dans le §5 on établit l'analogue discret du théorème du noyau et l'on en déduit quelques conséquences utiles. Le §6 est consacré à l'étude des formules de commutation pour les opérateurs aux différences finies. Dans le §7, on établit des formules analogues pour le symbole de l'opérateur conjugué. Finalement, on démontre dans le §8 l'analogue discret de l'inégalité de Gårding, en utilisant l'échelle des espaces $H_s(0, h_0)$ des fonctions de "maille". On ne fait aucune supposition sur l'approximation, en particulier, les résultats restent valables pour les opérateurs aux différences finies approximant des opérateurs pseudodifférentiels.

1. Notations

Comme d'habitude, on note par R_x^n l'espace euclidien réel de dimension n et par R_ξ^n l'espace dual des formes linéaires sur R_x^n. Puis on désigne $R_+^1 = \{t \in R^1 \mid t > 0\}$. On note par $R_{x,h}^n$ une famille uniparamétrique de réseaux dans R_x^n de pas $h_j = r_j h$ en x_j; pour tout h, $0 < h \leqq h_0$, le réseau $R_{x,h}^n$ contenant l'origine; ici r_j, $1 \leqq j \leqq n$ sont des constantes positives. On désigne par $T_{\xi,h}^n$ la famille uniparamétrique des tores duals à $R_{x,h}^n$, $T_{\xi,h}^n = \{\xi \in R_\xi^n, \ |h_j \xi_j| \leqq \pi\}$; au lieu de $T_{\xi,1}^n$ on écrira T_ξ^n. On réserve la notation usuelle $\mathbb{Z}^n$ pour l'anneau des n-uples dont les coordonnées sont des nombres entiers, tandis que $\mathbb{Z}_+^n$ désigne l'ensemble des n-uples de $\mathbb{Z}^n$ dont les coordonnées sont non-négatives; on appelle les éléments de $\mathbb{Z}_+^n$ multiindex. Puis on pose $\zeta_\xi = \{\zeta_{\xi_1}, \cdots, \zeta_{\xi_n}\}$, $\zeta_{\xi_j} = (ih_j)^{-1}(\exp(ih_j\xi_j) - 1)$ et l'on note ω_ξ le vecteur aux coordonnées complexes qui s'obtient de ζ_ξ, lorsque $h = 1$. Pour tout ζ de l'espace complexe C^n de dimension n on pose: $\langle \zeta \rangle^s = (1 + |\zeta|^2)^{s/2}$. Pour toute fonction de maille $u(x)$ à valeurs dans R^p on note par $\tilde{u}^h(\xi)$ sa transformée de Fourier discrète. Si $u(x)$ est une fonction d'argument continue, on note, comme d'habitude par $\tilde{u}(\xi)$ sa transformée de Fourrier intégrale. Nous désignons également par $F_{x \to \xi, h}$ et $F_{x \to \xi}$ respectivement les opérateurs de la transformée de Fourrier discrète et intégrale, les opérateurs inverses étant désignés respectivement par $F_{\xi \to x, h}^{-1}$ et $F_{\xi \to x}^{-1}$. On pose:

$$(u, v)^h = \sum_{x \in R_{x,h}^n} u(x)\overline{v(x)} h_1 \cdots h_n \tag{1.1}$$

On conserve les notations usuelles C^∞ et C_0^∞ pour l'ensemble des fonctions indéfiniment différentiables et celui des fonctions indéfiniement différentiables à support compact. En ce qui concerne la définition et les propriétés des espaces de fonctions de maille $C^k(0, h_0)$ et $H_s(0, h_0)$, nous renvoyons le lecteur à l'article [2]. On écrit C^k et H_s tout court lorsqu'il n'y a pas le danger de confondre ces espaces de fonctions de maille avec les espaces classiques correspondant des fonctions d'argument continu. Posons, ensuite

$$C^\infty(0, h_0) = \bigcap_{k=0} C^k(0, h_0), \quad H_\infty(0, h_0) = \bigcap_s H_s(0, h_0)$$

On note par $\mathscr{L}(W_1, W_L)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus de l'espace de Banach W_1, dans l'espace de Banach W_2.

Soit $a(x, \xi)$ une fonction sur $R_x^n \times R_\xi^n$ à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre p. Pour tout couple $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$ on pose

$$a_{\beta}^{\alpha}(x,\xi) = D_x^{\beta}\partial_{\xi}^{\alpha}a(x,\xi)$$

où $D_x^{\beta} = D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_{x_j} = -i\partial_{x_j}$, $\partial_{\xi}^{\alpha} = \partial_{\xi_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{\xi_n}^{\alpha_n}$, ∂_{x_j} et ∂_{ξ_j} étant respectivement les dérivées premières par rapport à x_j et ξ_j; parfois, on écrira $a_{(-ix)^{\beta}\xi^{\alpha}}$ au lieu de $a_{\beta}^{\alpha}(x,\xi)$.

Puis on désigne

$$a_{\langle x\rangle^j\xi^{\alpha}}(x,\xi) = (1+|\partial_x|^2)^{j/2}\partial_{\xi}^{\alpha}a(x,\xi),$$

où $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, $j\in\mathbb{Z}_+^1$, et l'opérateur pseudodifférentiel $(1+|\partial_x|^2)^{\frac{1}{2}}$ est défini de façon usuelle.

Posons encore: $D_{x,h} = (D_{x_1,h_1}\cdots D_{x_n,h_n})$, $\bar{D}_{x,h} = (\bar{D}_{x_1,x_1}\cdots\bar{D}_{x_n\,h_n})$ ou $D_{x_j,h}$ et $\bar{D}_{x_j,h}$ sont des opérateurs de différences finies premières respectivement en avant et en arrière, multipliées par $-i$. On note par

$$\Theta_{x,h} = (\Theta_{x_1,h},\cdots,\Theta_{x_n,h_n}),\ \bar{\Theta}_{x,h} = (\bar{\Theta}_{x_1\,h_1},\cdots,\bar{\Theta}_{x_n\,h_n})$$

les opérateurs de translations de pas $(h_1,\cdots,h_n)$ respectivement en avant et en arrière. Il est clair que les identités suivantes sont valables:

$$\Theta_{x_j,h_j} = 1+ih_jD_{x_j,h},\ \bar{\Theta}_{x_j,h_j} = 1-ih_j\bar{D}_{x_j,h_j}$$

où, sous la forme vectorielle

$$\Theta_{x,h} = 1+ihD_{x,h},\ \bar{\Theta}_{x,h} = 1-ih\bar{D}_{x,h}$$

Puis, comme d'habitude, pour tout $\alpha\in\mathbb{Z}_+^n$, on pose $D_{x,h}^{\alpha} = D_{x_1,h_1}^{\alpha_1}\cdots D_{x_n,h_n}^{\alpha_n}$ et de même pour tous les autres opérateurs définis sur le réseau. On désigne par ${}^t a(x,\xi)$ la matrice conjuguée de $a(x,\xi)$. Puis on réserve la notation $a_{\beta}^{\alpha h}(\chi,\xi)$ pour la transformée de Fourrier discrète de $a_{\beta}^{\alpha}(x,\xi)$ par rapport à la première variable, la variable χ étant duale de la variable x. Quelquefois on écrira également $\tilde{a}^h_{(-ix)^{\beta}\xi^{\alpha}}$. Respectivement $a_{\beta}^{\alpha}(\chi,\xi)$ est la transformée de Fourrier intégrale de $a_{\beta}^{\alpha}(x,\xi)$ par rapport à la variable x. On note par $|a(x,\xi)|$, ou par $|a|$ tout court la norme de la matrice $a(x,\xi)$.

Soit $\phi(t)\in C^{\infty}$ pour $t\geqq 0$ et $0\leqq\phi(t)\leqq 1$, $\phi(t)\equiv 0$ pour $0\leqq t\leqq\delta$, $\phi(t)\equiv 1$ pour $t\geqq 2\delta$. Posons

$$\phi_{\xi} = \phi(|\zeta_{\xi}|). \tag{1.2}$$

2. Classes des symboles quasihomogènes $K\nu$. Classes des symboles $\mathscr{L}\nu$. Symboles gradués

Classes K_ν.

Soit $a(x,\xi)$, une fonction sur $R^n_x \times R^n_\xi$ à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre p, qui dépendent périodiquement de ξ avec les périodes $(2\pi/r_1,\cdots,2\pi/r_n)$. Le nombre ν étant réel, on définit pour tout $j \in \mathbb{Z}^1_+$ et tout $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$ les normes

$$(2.1)\qquad [\,|\tilde{a}^h_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}|\,]_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n}\operatorname*{Sup}_h \int_{T^n_{\chi,h}} \operatorname{Sup}\langle\zeta_\chi\rangle^j |\tilde{a}^h_{\xi^\alpha}(\chi,\xi)|\,|\omega_\xi|^{|\alpha|-\nu}\, d\chi$$

et les normes

$$(2.2)\qquad \|\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\|_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n}\int_{R^n_\chi} \operatorname*{Sup}_\xi \langle\chi\rangle^j |\tilde{a}_{\xi^\alpha}(\chi,\xi)|\,|\omega_\xi|^{|\alpha|-\nu} d\chi$$

Par définition, la classe K_ν, $\nu \in R^1$, est composée de toutes les fonctions à valeurs matricielles $a(x,\xi)$ qui vérifient les conditions

$$(2.3)\qquad \|\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\|_{|\alpha|-\nu} < \infty,\ \forall (j,\alpha)\in \mathbb{Z}^1_+ \times \mathbb{Z}^n_+,$$

en outre la fonction $a(x,\xi)$ est dite symbole canonique ou quasihomogène d'ordre ν. On note par ord a l'ordre ν du symbole a.

Symbole gradué.

Soit $\{s_j\}_{j=0}^\infty$ une suite de nombres réels, en outre, on suppose que $s_j \downarrow -\infty$. On appelle symbole gradué et l'on note par $\sigma_\Gamma(a)$ la série formelle

$$(2.4)\qquad \sigma_\Gamma(a) = \sum_{j\geq 0}{}^j a(x,\xi),\ {}^j a(x,\xi) \in K_{s_j}.$$

Classes $\mathscr{L}_\nu$.

Soit $a(h,x,\xi)$, $(x,\xi)\in R^n_x \times R^n_\xi$, $h \in (0,h_0)$ une fonction à valeurs dans l'espace des matrices carrées d'ordre p, a dépendant continument de (h,x,ξ) et étant pour tout $h \in (0,h_0)$, une fonction indéfiniment différentiable de (x,ξ); on suppose, en outre que a est périodique en ξ avec les périodes $(2\pi/h_1,\cdots,2\pi/h_n)$, $h_j = r_j h$.

On définit pour ces fonctions matricielles les normes

$$(2.5)\qquad |\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}|_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n}\int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi} \langle\chi\rangle^j |\tilde{a}_{\xi^\alpha}(h,\chi,\xi)|\,\langle\zeta_\xi\rangle^{|\alpha|-\nu} d\chi,$$

$$(2.5)' \quad [\tilde{a}^h_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}]_{|\alpha|-\nu} = (2\pi)^{-n}\sup_h \int_{R^n_{h,\chi}}^x \sup \langle\zeta_\chi\rangle^j \left| \tilde{a}^h_{\xi^\alpha}(\chi,\xi)\right| \langle\zeta_\xi\rangle^{|\alpha|-\nu} d\chi$$

$$\nu \in R^1,\ j \in \mathbb{Z}^1_+,\ \alpha \in \mathbb{Z}^n_+.$$

On définit la classe $\mathscr{L}_\nu$ des fonctions matricielles $a(h,x,\xi)$ ayant les propriétés ci-dessus et vérifiant la condition: il existe un symbole gradué

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{k=0} {}^k a(x,\xi),\ {}^k a \in K_{s_k},\ s_0 = \nu$$

tel que les inégalités suivantes soient vérifies:

$$(2.6) \qquad \left| \widetilde{{}^N r}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|-s_n} < \infty,\ \forall (j,\alpha,N) \in \mathbb{Z}^1_+ \times \mathbb{Z}^n_+ \times \mathbb{Z}^1_+,$$

les ${}^N r = {}^N r(h,x,\xi)$ dans (2.6) désignant les restes:

$$(2.7) \qquad \begin{cases} {}^N r(h,x,\xi) = a(h,x,\xi) - \phi_\xi \sum\limits_{0\leq k<N} h^{-s_k}\ {}^k a(x,h\xi),\ N \geqq 1 \\ {}^0 r(h,x,\xi) = a(h,x,\xi). \end{cases}$$

La fonction matricielle $a(h,x,\xi)$ est dite symbole.

Théorème 2.1. *Soit un symbole gradué* $\sigma_\Gamma(a) = \sum_{k\geq 0} {}^k a(x,\xi)$, *avec* ${}^k a \in K_{s_k}$, $s_0 = \nu$. *Il existe un symbole* $a(h,x,\xi) \in \mathscr{L}_\nu$ *ayant* $\sigma_\Gamma(a)$ *pour symbole gradué.*

Démonstration. Soient $\phi(t)$ la même fonction que dans (1.2) et $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ une suite de nombres réels tel que $t_k \downarrow 0$. Avec les notations

$$(2.8) \qquad {}^k b(h,x,\xi) = \phi(t_k|\zeta_\xi|) h^{-s_k}\ {}^k a(x,h\xi)$$

on pose

$$(2.9) \qquad a(h,x,\xi) = \sum_{k\geqq 0} {}^k b(h,x,\xi).$$

Pour tout h fixe, $h \in (0,h_0)$, et pour tout couple $(x,\xi) \in R^n_x \times R^n_\xi$ il n'y a dans la somme (2.9) qu'un nombre fini de termes qui ne disparaissent pas.

Mettons $t_0 = 1$ et choississons t_k, $k \geqq 1$, de manière que soient vérifiées les inégalités

$$(2.10) \qquad \left| \widetilde{{}^k b}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|-s_{k-1}} \leqq 2^{-k}, \qquad j + |\alpha| \leqq k.$$

On va utiliser la formule de Leibnitz pour estimer le terme

$$(2.11) \qquad \widetilde{{}^k b}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha} = \langle x\rangle^j \partial^\alpha_\xi[\phi(t_k|\zeta_\xi|)h^{-s_k}\ \widetilde{{}^k a}(\chi,h\xi)].$$

Il est facile de voir que les termes du second membre de (2.11) ne contenant les dérivées de ϕ, peuvent être majorées

(2.12) $\left|\phi(t_k|\zeta_\xi|)h^{-s_k}\, {}^k\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|-s_{k-1}} \leqq$

$$\leqq C\sup_{h,\xi}\,[\phi(t_k|\zeta_\xi|)|\zeta_\xi|^{s_k-|\alpha|}\langle\zeta_\xi\rangle_{|\alpha|-s_{k-1}}]\left\|\, {}^k\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right\|_{|\alpha|-s_k}.$$

Puis, vu que $\phi(t_k|\zeta_\xi|) = 0$ pour $t_k|\zeta_\xi| \leqq \delta$, on a

$$\phi(t_k|\zeta_\xi|)|\zeta_\xi|^{s_k-|\alpha|}\langle\zeta_\xi\rangle^{|\alpha|-s_{k-1}} \leqq C_\alpha t_k^{s_{k-1}-s_k}$$

de sorte que l'expression dans le second membre de (2.12) peut être majorée par

$$C_\alpha t_k^{s_{k-1}-s_k}\left\|\, {}^k\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right\|_{|\alpha|-s_k}. \tag{2.13}$$

Les termes dans le second membre de (2.11) contenant les dérivées d'ordre q de la fonction ϕ, possèdent également le facteur t_k^q; compte tenu du fait que dans le support des dérivées de ϕ on a: $t_k \sim |\zeta_\xi|^{-1}$, on arrive immédiatement à la conclusion que les termes en question sont bornés supérieurement par une majorante du type (2.13). Ainsi, on a montré que

$$\left|\, {}^k b_{\langle x\rangle^n\xi^c}\right|_{|\alpha|-r_{k-1}} \leqq C_\alpha t_k^{s_{k-1}-s_k}\left\|\, {}^k\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right\|_{|\alpha|-s_k}.$$

Posant

$$m_k = \sup_{j+|\alpha|\leqq k} C_\alpha\left\|\, {}^k\tilde{a}_{\langle x\rangle^j\xi^\alpha}\right\|_{|\alpha|-s_k}$$

et choisissant t_k de manière que l'on ait

$$t_k \leqq (m_k^{-1}\,2^{-k})^{(s_{k-1}-s_k)^{-1}}$$

on obtient finalement les inégalités voulues (2.10).

On vérifie aisément que la fonction $a(h,x,\xi)$ définie par la formule (2.9) satisfait les conditions (2.6). Le théorème 2.1 est démontré.

3. Définition d'un opérateur aux différences finies (o.d.f.) par le symbole. Relation avec le symbole gradué

Soit une fonction matricielle $a(h,x,\xi)\in\mathscr{L}_\nu$. On définit pour toute fonction $u(x)\in C_0^\infty(R_x^n)$ à valeurs dans R^p, une famille d'opérateurs aux différences finies A^h, $0 < h \leqq h_0$:

$$A^h u = F^{-1}_{\xi\to x,h}a(h,x,\xi)F_{x\to\xi\,h}u + T^h_\infty u. \tag{3.1}$$

Ici et dans tout ce qui suit, on réserve la notation T^h_∞ pour une famille uniparamétrique d'opérateurs jouissant de la propriété suivante: l'image de $H_s(0, h_0)$ par T^h_∞ appartient à l'espace $H_\infty(0, h_0)$, quelque soit $s \in R^1$.

Quelquefois on usera de la notation $a(h, x, D)$ pour désigner une famille A^h des o.d.f.

On appelle symbole d'une famille A^h et l'on note $\sigma(A^h)$ la fonction matricielle $a(h, x, \xi)$ intervenant dans le second membre de la formule (3.1); le symbole gradué $\sigma_\Gamma(a)$ est dit également symbole gradué de la famille A^h et noté dans ce cas $\sigma_\Gamma(A^h)$.

THÉORÈME 3.1. *Soit $a \in \mathscr{L}_\nu$. Alors la famille des opérateurs:*

$$A^h : C_0^\infty \to C^\infty, \tag{3.2}$$

est uniformément bornée par rapport à $h \in (0, h_0)$.

DÉMONSTRATION. Vue la formule de Poisson (cf. [2])

$$\tilde{u}^h(\xi) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} u(\xi + 2\pi\gamma r^{-1} h^{-1}), \tag{3.2$'$}$$

où $r = (r_1, \cdots, r_n)$, $\gamma r^{-1} = (\gamma_1 r_1^{-1}, \cdots, \gamma_n r_n^{-1})$, et compte tenu de la périodicité de la fonction $a(h, x, \xi)$ en ξ, il vient immédiatement:

$$A^h u = F^{-1}_{\xi \to x} a(h, x, \xi) F_{x \to \xi} u = (2\pi)^{-n} \int_{R_\xi} e^{ix,\xi} a(h, x, \xi) \tilde{u}(\xi) d\xi \tag{3.3}$$

$$\forall u \in C_0^\infty(R_x^n).$$

La fonction $\tilde{u}(\xi)$ décroissant rapidement et la fonction $a(h, x, \xi)$ étant une fonction de la classe C^∞ en x, la possibilité de différencier sous le signe d'intégrale dans le second membre de (3.3) ne suscite pas de doute. Appliquant la formule de Leibnitz, ainsi que multipliant et divisant par $\langle \zeta_\xi \rangle^\nu$, il vient,

$$\partial_\nu^\alpha(A^h u) = (2\pi)^{-n} \sum_{\beta \leqq \alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} \int_{R^n_\xi} e^{ix\xi} a_\beta(h, x, \xi) \langle \zeta_\xi \rangle^{-\nu} (i\xi)^{\alpha-\beta} \langle \zeta_\xi \rangle^\nu \tilde{u}(\xi) d\xi .$$

Maintenant pour démontrer le théorème il suffit de noter que

$$\sup_{h,x,\xi} |a_\beta(h, x, \xi)| \langle \zeta_\xi \rangle^{-\nu} \leqq |\tilde{a}_{\langle x \rangle j}|_{-\nu}, \qquad j = |\beta|,$$

et que

$$\langle \zeta_\xi \rangle \leqq \langle \xi \rangle.$$

Le théorème 3.1. est démontré.

Le théorème suivant établit le rapport entre l'opérateur aux différences finie A^h de symbole $a(h, x, \xi)$ et le symbole gradué $\sigma_\Gamma(a) = \sum_{k \geqq 0} {}^k a(x, \xi)$.

THÉORÈME 3.2. *Soit A^h une famille de o.d.f. de symbole $a(h,x,\xi)$ et soit $\sigma r(a) = \sum_{k \geqq 0} a(x,\xi)$ le symbole gradué de $a(h,x,\xi)$. Alors on a la formule asymptotique*:

$$\exp(-ih^{-1}x.\eta)\, A^h(\exp(ih^{-1}x.\eta)f) = \sum_{k\geqq 0, \alpha\in \mathbb{Z}^n_+} \frac{h^{|\alpha|-s_k}}{\alpha!}\, {}^k a^\alpha(x,\eta) D^\alpha_x f, \tag{3.4}$$
$$(h\to 0)$$
$$\eta \in T^n_\eta \setminus \{0\},\ f\in C^\infty_0(R^n_x).$$

DÉMONSTRATION. La définition (3.1) et l'identité (3.3) donnent:

$$\exp(-ih^{-1}x\cdot\eta)A^h(\exp(ih^{-1}x\cdot\eta)f) = (2\pi)^{-n}\int_{R^n_\xi} \exp(ix.(\xi-h^{-1}\eta))a(h,x,\xi)\tilde f(\xi-h^{-1}\eta)\, d\xi$$
$$= (2\pi)^{-n}\int_{R^n_\xi} \exp(ix.\xi))a(h,x,\xi+h^{-1}\eta)\tilde f(\xi)d\xi.$$

On va utiliser la formule de Taylor

$$a(h,x,\xi+h^{-1}\eta) = \sum_{|\alpha|<N} \frac{1}{\alpha!} a^\alpha(h,x,h^{-1}\eta)\xi^\alpha + Q_N(h,x,\xi,\eta).$$

Vue la définition (1.2) de la fonction ϕ_ξ, on a pour h suffisemment petit $\phi_{h^{-1}\eta} = 1$, ce qui donne immédiatement dans ce cas

$$h^{s_M-|\alpha|}\Big| a^\alpha(h,x,h^{-1}\eta) - \sum_{0\leqq k<M} h^{-s_k}\, {}^k a^\alpha(x,\eta)\Big| \leqq \tag{3.5}$$
$$\leqq \big|{}^{\widetilde{M}} r_{\xi\alpha}\big|_{|\alpha|-s_M},\ \forall M \geqq 1,\ V\alpha\in \mathbb{Z}^n_+,$$

les fonctions ${}^M r_{\xi\alpha}$ étant définies par les formules (2.7).

Les inégalités (2.6) et (3.5) permettent d'écrire l'égalité asymptotique

$$a^\alpha(h,x,h^{-1}\eta) = \sum_{k\geqq 0} h^{-s_k+|\alpha|}\, {}^k a^\alpha(x,\eta) \quad (h\to 0). \tag{3.6}$$

Il reste, pour achever la démonstration du théorème (3.2) à estimer la quantité

$$Q_N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!}\int_{R^n_\xi} a^\alpha(h,x,h^{-1}\eta+\rho\xi)\xi^\alpha \exp(ix.\xi)\tilde f(\xi)d\xi.$$

Posant $E_h = \{\xi\in R^n_\xi\colon h|\xi| \leqq 2^{-1}|\eta|\}$ et notant que

$$\sup_{\xi\in E_h} \big| a^\alpha(h,x,h^{-1}\eta+\rho\xi)\big| = \sup_{\xi\in E_h} \langle \zeta_{h^{-1}\eta+\rho\xi}\rangle^{\nu-N} \big|\tilde a_{\xi\alpha}\big|_{N-\nu} \leqq Ch^{N-\nu}\big|\tilde a_{\xi\alpha}\big|_{N-\nu},$$

ainsi que

$$\sup_{h,x\,\Theta} \left| a^{\alpha}(h,x,\Theta)\right| \leqq \left| \tilde{a}_{\xi\alpha}\right|_{N-\nu}, \qquad \left|\alpha\right| = N$$

on est conduit à la conclusion que le reste est borné supérieurement par la quantité

$$C \sum_{|\alpha|=N} \left| \tilde{a}_{\xi\alpha}\right|_{N-\nu} h^{N-\nu} \int_{R^n_\xi} \langle\xi\rangle^N \left| \tilde{f}(\xi)\right| d\xi \, + \tag{3.7}$$

$$+ \int_{h|\xi| \geqq 2^{-1}|\eta|} \langle\xi\rangle^N \left|\tilde{f}(\xi)\right| d\xi \, .$$

La fonction f appartenant à $C_0^\infty(R_x^n)$, la seconde intégrale dans (3.7) décroit plus rapidement que h^j, quelque soit j. Cela achève la démonstration du théorème 3.2.

En réalité, on a démontré un peu plus. Notamment, on a démontré que

$$\exp(-ih^{-1}x\cdot\eta)A^h(\exp(ih^{-1}x\cdot\eta)f) - \sum_{|\alpha|<N,k<M} \frac{h^{|\alpha|-s_k}}{\alpha!}\, {}^k a^{\alpha}(x,\eta) D^{\alpha}_x f = O(h^{N-\nu}+h^{s_M})$$

lorsque $h \to 0$

uniformément par rapport à $x \in R^n_x$ et pour toute $f(x)$ appartenant à un ensemble borné dans $C_0^\infty(R^n_x)$.

En tant que conséquence du théorème 3.2, on obtient le résultat suivant:

Théorème 3.3. *Le symbole gradué d'une famille de o.d.f. A^h est défini de façon unique.*

Démonstration. En effet, soient $\sigma^{(1)}(a) = \sum_{k\geqq 0} {}^k a^{(1)}$ et $\sigma^{(2)}(a) = \sum_{k\leqq 0} {}^k a^{(2)}$ deux symboles gradués de la famille A^h. Vue la formule (3.4), il vient immédiatement

$$\operatorname{ord} {}^k a^{(1)} = \operatorname{ord} {}^k a^{(2)}, \quad {}^k a^{(1)} \equiv {}^k a^{(2)}, \qquad k \geqq 0 \, .$$

4. Ordre d'un opérateur aux differences finies. Théorème de continuité dans les espaces H_s $(0,\, h_0)$

Soit une famille $A^h = a(h,x,D_x)$ de o.d.f. de symbole $a(h,x,\xi) \in \mathscr{L}_\nu$. Si pour tout $\mu < \nu$ on a: $a(h,x,\xi) \notin \mathscr{L}_\mu$, alors le nombre ν est dit ordre de la famille A^h. On écrira dans ce cas

$$\operatorname{ord} A^h = \nu \, .$$

Théorème 4.1. *Soit une famille A^h et* $\operatorname{ord} A^h = \nu$. *Alors l'opérateur*

$$A^h \colon C_0^\infty(R^n_x) \to C^\infty(R^n_x)$$

peut être prolongé comme opérateur linéaire continue de H_{s+v} dans H_s pour tout $s \in R^1$. En outre modulo l'opérateur T^h_∞, les estimations suivantes sont vraies

$$\| A^h \|_{H_{s+v} \to H_s} \leqq 2^{|s|} | \tilde{a}_{\langle x \rangle |s|} |_{-v} \tag{4.1}$$

DÉMONSTRATION. Etant donné que $C_0^\infty(R_x^n)$ est dense dans $H_s(0, h_0)$, $\forall s \in R^1$ (cf [9]), il suffit de démontrer l'inégalité

$$\| A^h u \|_{s,h} \leqq C \| u \|_{s+v\ h}, \ \forall u \in C_0^\infty(R_x^n), \tag{4.2}$$

avec une constante C indépendante de h et u.

Il est facile de vérifier que pour une famille A^h de simbole $a(h, x, \xi)$ la représentation suivante est valable (modulo T^h_∞)

$$\widetilde{(A^h u)}^h(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\eta,h}} \tilde{a}^h(h, \xi - \eta, \eta) \hat{u}^h(\eta) d\eta \tag{4.3}$$

Posant

$$\tilde{v}^h(\eta) = \langle \zeta_\xi \rangle^{s+v} \hat{u}^h(\eta), \ \tilde{w}^h(\xi) = \langle \zeta_\xi \rangle^s \widetilde{(A^h u)}^h(\xi),$$

on obtient une famille d'opérateurs aux différences finies

$$\tilde{w}^h(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\eta,h}} \langle \zeta_\xi \rangle^s \tilde{a}^h(h, \xi - \eta, \eta) \langle \zeta_\eta \rangle^{-(s+v)} \tilde{v}^h(\eta) d\eta,$$

dont la norme dans $L_L(T^n_{\xi,h})$ coincide avec $\| A^h \|_{H_{s+v,h} \to H_{s,h}}$.

Le lemme de Schur bien connu permet de réduire l'estimation de la norme $\| A^h \|_{H_{s+v,h} \to H_{s,h}}$ à l'évaluation des expressions

$$\begin{cases} \sup\limits_h \int_{T^n_{\xi,h}} \sup\limits_\eta \langle \zeta_\xi \rangle^s | \tilde{a}^h(h, \xi - \eta, \eta) | \langle \zeta_\eta \rangle^{-(s+v)} d\xi \\ \sup\limits_h \int_{T^n_{\eta,h}} \sup\limits_\xi \langle \zeta_\xi \rangle^s | \tilde{a}^h(h, \xi - \eta, \eta) | \langle \zeta_\eta \rangle^{-(s+v)} d\eta \end{cases} \tag{4.4}$$

On va avoir besoin d'une variante du lemme de Peetre.

LEMME 4.1. *Quleque soit $s \in R^1$, les inégalités suivantes sont vraies:*

$$\langle \zeta_\xi \rangle^s \langle \zeta_\eta \rangle^{-s} \leqq 2^{|s|} \langle \zeta_{\xi - \eta} \rangle^{|s|}. \tag{4.5}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 4.1. L'inégalité de Peetre classique (cf. [5]), donne

$$\langle \zeta_\xi^s \rangle \langle \zeta_\eta \rangle^{-s} \leqq 2^{|s|} \langle \zeta_\xi - \zeta_\eta \rangle^{|s|}.$$

Après un calcul élémentaire, on obtient

$$\langle \zeta_\xi - \zeta_\eta \rangle = \langle \zeta_{\xi - \eta} \rangle.$$

ce qui prouve le lemme 4.1.

Appliquant (4.5) on obtient pour les expressions (4.4) la majorante

$$2^{|s|}[\tilde{a}^h_{\langle x\rangle |s|}]_{-\nu}\,.$$

Maintenant pour obtenir l'inégalité (4.1), il suffit de montrer que

$$[\tilde{a}^h_{\langle x\rangle |s|}]_{-\nu} \leqq |\,\tilde{a}_{\langle x\rangle |s|}]_{-\nu}\,. \tag{4.7}$$

Cette dernière inégalité est le résultat immédiat de la formule de Poisson (cf. [2]), qui établit le rapport entre la transformée de Fourrier discrète et intégrale.

5. Théorème sur le noyau d'une famille de o. d. f. de symbole gradué nul

Dans ce paragraphe on va étudier la structure d'une famille A^h d'opérateurs aux différences finies dont le symbole gradué $\sigma_\Gamma(a)$ est identiquement nul.

THÉORÈME 5.1. *Soit une famille A^h de o.d.f. de symbole $a(h,x,\xi)$ dont le symbole gradué $\sigma_\Gamma(a)$ s'annulle identiquement*

$$\sigma_\Gamma(a) = 0\,. \tag{5.1}$$

Alors la famille A^h admet la représentation:

$$(A^h u)(x) = \sum_{y \in R^n_{\dots,h}} K(h,x,y)u(y)h_1 \cdots h_n, \qquad u \in C_0^\infty(R^n_x), \tag{5.2}$$

la famille de fonctions $K(h,x,y)$, $h \in (0,h_0)$, dans le second membre de (5.2) étant définie pour tout couple $(x,y) \in R^n_x \times R^n_y)$ et appartenant à un ensemble borné dans $C^\infty(R^n_x \times R^n_y)$.

DÉMONSTRATION. Posons

$$K(h,x,y) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} \exp(i(x-y,\xi))a(h,x,\xi)d\xi. \tag{5.3}$$

La transformée de Fourrier discrète, tout comme dans le cas continue, faisant correspondre à la convolution discrète de deux fonctions de maille, le produit de leurs images de Fourrier discrètes, on obtient immédiatement la formule (5.2) avec le noyau $K(h,x,y)$ défini par la formule (5.3). Il reste à démontrer que la famille de fonctions (5.3) appartient à un ensemble borné dans $C^\infty(R^n_x \times R^n_y)$. Ceci s'ensuit immédiatement des inégalités (2.6). En effet, sous les hypothèses du théorème, l'inégalité (2.6) avec $\alpha = 0$ donne:

$$|\,\tilde{a}_{\langle x\rangle j}|_{-s_N} < \infty\,, \quad \forall (j,N) \in \mathbb{Z}^1_+ \times \mathbb{Z}^1_+\,. \tag{5.4}$$

Puis, pour tout $|\alpha| = j$ on a:

$$|D_y^\alpha K(h,x,y)| \leqq (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\xi,h}} |\xi^\alpha|\,|a(h,x,\xi)|\,d\xi \leqq$$

$$\leqq C\int_{T^n_{\xi,h}} \langle\zeta_\xi\rangle^{-(n+1)}|a(h,x,\xi)|\langle\zeta_\xi\rangle^{(n+j+1)}d\xi < C_1 \sup_\xi |a(h,x,\xi)|\langle\zeta_\xi\rangle^{n+j+1}.$$

Maintenant, vue l'inégalité évidente

$$|a(h,x,\xi)|\langle\zeta_\xi\rangle^{n+j+1} \leqq |\tilde a|_{-(n+j+1)}$$

et l'inégalité (5.4) avec $j = 0$, nous sommes conduit à la conclusion que

$$\sup_{h,x,y} |D_y^\alpha K(h,x,y)| < \infty, \quad \forall\alpha\in\mathbb{Z}^n_+.$$

On démontre de façon analogue les inégalités

$$\sup_{h,x,y} |D_y^\alpha D_x^\beta K(h,x,y)| < \infty, \quad \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{Z}^n_+\times\mathbb{Z}^n_+, \tag{5.5}$$

utilisant dans ce cas les inégalités (5.4) avec $j \leqq |\beta|$.

Le théorème 5.1 est démontré.

Comme une conséquence simple du théorème 5.1, on obtient le résultat suivant:

THÉORÈME 5.2. *Une famille A^h d'opérateurs aux différences finies est bien définie par son symbole gradué $\sigma_\Gamma(a)$ modulo un opérateur T^h_∞, ce dernier appliquant tout espace $H_s(0,h_0)$ dans $C^\infty(0,h_0)$.*

DÉMONSTRATION. Soient A_1^h et A_2^h deux familles de o.d.f. ayant $\sigma_\Gamma(a)$ pour symbole gradué. La différence $A_1^h - A_2^h = R^h$ en vertu du théorème 5.1 peut être mise sous la forme (5.2). Les propriétés du noyau $K(h,x,y)$ dans (5.2) établies par le théorème précédent, garantissent la continuité de l'application:

$$R^h\colon H_s(0,h_0) \to C^\infty(0,h_0)$$

quelque soit $s\in R^1$.

6. Composition de familles de o.d.f.

On va montrer dans ce paragraphe que la composition de deux familles de o.d.f. est encore une famille de o.d.f. et on va expliciter la formule pour le symbole et symbole gradué d'une composition par les symboles et symboles gradués des familles données initialement. On va ennoncer le résultat:

THÉORÈME 6.1. *Soient deux familles de o.d.f. A^h et B^h d'ordres respectivement ν et μ et de symboles $a(h,x,\xi)$ et $b(h,x,\xi)$. Alors la composition $A^h\circ B^h$*

est une famille de o.d.f. d'ordre $\nu+\mu$ qui pour tout $N \in \mathbb{Z}^1_+$, $N \geqq 1$, peut être mise sous la forme

$$A^h \circ B^h = \sum_{0 \leqq j \leqq N-1} C_j^h + R_N^h, \tag{6.1}$$

où les familles de o.d.f. C_j^h sont d'ordre $\nu+\mu-j$ et ont pour symbole les fonctions matricielles

$$c_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} a^\alpha(h,x,\xi) b_\alpha(h,x,\xi), \tag{6.2}$$

en outre, la famille de o.d.f. R_N^h est continue de $H_s(0,h_0)$ dans $H_{s-\nu-\mu+N}$ pour tout $s \in R^1$, l'estimation suivante étant vérifiée pour R_N^h;

$$\| R_N^h \|_{H_s \to H_{\nu-\mu+N}} \leqq c(s,\nu,\mu,N,n) \left| \tilde{b}_{\langle x \rangle\, |s-\mu|+|N-\nu|+N} \right|_{-\mu} \cdot \sum_{|\alpha| \leqq N} \left| \tilde{a}_{\langle x \rangle |s-\mu|+|N-\nu| \xi^\alpha} \right|_{|\alpha|-\nu}. \tag{6.3}$$

La constante $C(s,\nu,\mu,N,n)$ dans le second membre de (6.3) dépend seulement des parametres s,ν,μ,N,n.

Pour le symbole gradué $\sigma_1(a \circ b)$ de la composition $A^h \circ B^h$ la formule suivante est vérifiée:

$$\sigma_\Gamma(a \circ b) = \sum_{j,k,\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^{\alpha\, j} a(x,\xi) D_x^{\alpha\, k} b(x,\xi), \tag{6.4}$$

ici on a noté par $\sigma_\Gamma(a)$ et $\sigma_\Gamma(b)$ respectivement les symboles gradués de A^h et de B^h,

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j \geqq 0} {}^j a(x,\xi), \quad \text{ord}\, {}^j a = s_j, \tag{6.5}$$

$$\sigma_\Gamma(b) = \sum_{k \geqq 0} {}^k b(x,\xi), \quad \text{ord}\, {}^k b = r_k,$$

en outre, l'ordre de $\partial_\xi^\alpha({}^j a(x,\xi) D_x^{\alpha\, k} b(x,\xi))$ étant:

$$\text{ord}\, (\partial_\xi^\alpha({}^j a(x,\xi) D_x^{\alpha\, k} b(x,\xi)) = s_j + r_k - |\alpha|. \tag{6.6}$$

DÉMONSTRATION. Utilisant la mise en forme (4.3) d'une famille de o.d.f. et le thèorème de Fubini, il vient

$$\tilde{v}^h(\xi) = F_{x \to \xi, h}([A^h \circ B^h]u) = \tag{6.7}$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\tau,h}} u^h(\tau) \left[\int_{T^n_{\eta,h}} \tilde{a}^h(h, \xi-\eta, \eta) \tilde{b}^h(h, \eta-\tau, \tau) d\eta \right] d\tau .$$

Appliquant la formule de Taylor à $\tilde{a}^h(h,\chi,\eta)$, en tant que fonction de η, avec le point τ pour centre; désignant par R_n^h le reste de la formule de Taylor mis sous la forme de Lagrange et posant

$$\tag{6.8} {}^{\alpha}\widetilde{r}^{h}(h,\chi,\tau) = \chi^{\alpha}\tilde{b}^{h}(h,\chi,\tau) - \tilde{b}_{\alpha}^{h}(h,\chi,\tau)$$

on obtient

$$\tag{6.9} \begin{aligned} \tilde{v}^h(\xi) = & \sum_{|\alpha|\leq N-1} \frac{1}{\alpha!}(2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\tau,h}} \tilde{u}^h(\tau)\left[\int_{T^n_{\eta,h}} \widetilde{a^{a}}^{h}(h,\xi-\eta,\tau)\right. \\ & \left.\tilde{b}_{\alpha}^h(h,\eta-\tau,\tau)d\eta\right]d\tau \\ & + \sum_{|\alpha|\leq N-1} \frac{1}{\alpha!}(2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\tau,h}} \tilde{u}^h(\tau)\left[\int_{T^n_{\eta,h}} \widetilde{a^{a}}^{h}(h,\xi-\eta,\tau)\right. \\ & \left.{}^{\alpha}\tilde{r}^h(h,\eta-\tau,\tau)d\eta\right]d\tau + \\ & + (2\pi)^{-n}\int_{T^n_{\cdot,h}} \widetilde{u}^h(\tau)\left[\int_{T^n_{\cdot,h}} \tilde{R}_N^h(h,\xi-\eta,\eta,\tau)\tilde{b}^h(h,\eta-\tau,\tau)d\eta\right]d\tau \end{aligned}$$

Notant que

$$\int_{T^n_{\eta,h}} \widetilde{a^{a}}^{h}(h,\xi-\eta,\tau)\tilde{b}_{\alpha}^h(\eta,\eta-\tau,\tau)d\eta = F_{x\to\xi-\tau,h}(a^{\alpha}(h,x,\tau)b_{\alpha}(h,x,\tau))$$

on obtient, compte tenu de (6.2), que la première somme dans (6.9) soit précisément

$$\tag{6.10} F_{x\to\xi,h}\left(\sum_{0\leq j\leq N-1} C_j^h u\right).$$

Ainsi, il reste, pour démontrer la première partie du théorème, à estimer la seconde somme et le dernier terme dans le second membre de (6.9). L'estimation voulue résultera des trois lemmes suivants.

LEMME 6.1. *Soient deux noyaux* $K_j(h,\chi,\tau)$, $j = 1,2$, $0 < h \leq h_0$, $(\chi,\tau)\in T^n_{\chi,h}\times T^n_{\tau,h}$, *vérifiant les conditions*:

$$[K_j] = \sup_h \int_{T^n_{\chi,h}} \sup|K_j(h,\chi,\tau)|\,d\chi < \infty\;;$$

on pose

$$K(h,\xi-\tau,\tau) = \int_{T^n_{\tau,h}} K_1(h,\xi-\eta,\Theta_\tau)K_2(h,\eta-\tau,\tau)d\eta$$

avec $\Theta_\tau = \tau + q(\eta - \tau)$, $0 \leqq q \leqq 1$, $(\tau, \eta) \in T^n_{\tau,h} \times T^n_{\eta,h}$.

Alors la famille uniparamétrique d'opérateurs K^h,

$$(K^h g)(\xi) = \int_{T^n_{\tau,h}} K(h, \xi - \tau, \tau) g(\tau) d\tau$$

est borné dans $L_2(T^n_{\xi,h})$ *uniformément par rapport au paramétre* h; *en outre*,

$$\sup_h \| K^h \|_{L_2 \to L_2} \leqq [K_1][K_2]. \tag{6.11}$$

LEMME 6.2. ${}^\alpha\tilde{r}^h$, $|\alpha| \leqq N-1$, *étant défini par la formule* (6.8) *et* $q = |N - \nu| + |s - \mu|$, *on pose*

$$ {}^\alpha P(h, \xi, \tau) = \int_{T^n_{\eta,h}} \langle \zeta_\xi \rangle^{s-\nu-\mu+N} \widetilde{a}^h(h, \xi - \eta, \tau) \widetilde{{}^\alpha r}^h(h, \eta - \tau, \tau) \langle \zeta_\tau \rangle^{-s} d\eta. \tag{6.12}$$

Alors la famille d'opérateurs intégraux ${}^\alpha P^h$ *ayant les fonctions* (6.12) *pour noyaux, est uniformément bornée dans* $L_2(T^n_{\xi,h})$; *en outre*

$$\| {}^\alpha P^h \|_{L_2 \to L_2} \leqq C |\tilde{a}_{\langle x \rangle^q \xi^\alpha}|_{|\alpha| - \nu} |\tilde{b}_{\langle x \rangle^{q+N}}|_{-\mu} \tag{6.13}$$

la constante C dans le seconde membre de (6.13) *ne dependant que de* N, s, ν, μ, η.

LEMME 6.3. $\tilde{R}^h_N$ *étant le reste dans la formule de Taylor dans* (6.9) *et le nombre* q *étant le même que dans l'énoncé du lemme* 6.2, *on pose*:

$$P_N(h, \xi, \tau) = \int_{T^n_{\eta,h}} \langle \zeta_\xi \rangle^{s-\nu-\mu+N} \tilde{R}^h_N(h, \xi - \eta, \eta, \tau) \tilde{b}^h(h, \eta - \tau, \tau) \langle \zeta_\tau \rangle^{-s} d\eta \tag{6.14}$$

Alors la famille P^h_N *d'opérateurs intégraux ayant les fonctions* (6.14) *pour noyaux, est uniformément bornée dans* $L_L(T^n_{\xi,h})$; *en outre, avec une constante ne dépendant que de* ν, μ, s, N, n *l'inégalité est vérifiée*

$$\| P^h_N \|_{L_2 \to L_2} \leqq C \sum_{|\alpha| \leqq N} |\tilde{a}_{\langle x \rangle^q \xi^\alpha}|_{|\alpha| - \nu} |\tilde{b}_{\langle x \rangle^{q+N}}|_{-\mu} \tag{6.15}$$

Utilisant le lemme 6.2 et le lemme 6.3 pour estimer respectivement la seconde somme et le reste dans le second membre de (6.9), nous obtenons immédiatement, compte tenu de (6.10), la représentation (6.1), (6.2) et l'estimation (6.3). Notons par $\sigma_\Gamma(a \circ b)$ le symbole gradué dans le second membre de (6.4). Le théorème 2.1 permet d'affirmer qu'il existe un symbole $c(h, x, \xi) \in \mathscr{L}_{\nu+\mu}$, ayant $\sigma_\Gamma(a \circ b)$ pour symbole gradué. Cela étant et compte tenu des relations (6.1)–(6.4), il est facile de vérifier la formule

$$A^h \circ B^h = C^h + T^h_\infty ,$$

ici C^h est la famille des o.d.f. ayant $c(h,x,\xi)$ pour symbole.

En effet, vus (6.1)–(6.4), un calcul facile donne

$$\sigma_\Gamma(A^h \circ B^h - C^h) = 0$$

Compte tenu du théorème 5.1., on a

$$A^h \circ B^h - C^h = T^h_\infty .$$

Il reste à démontrer le lemme 6.1. qui sera ensuite utilisé pour la démonstration des lemmes 6.2 et 6.3.

Démonstration du Lemme 6.1. Vu le lemme de Schur, il suffit de vérifier les inégalités

$$\sup_{h,\tau} \int_{T^n_{\xi,h}} |K(h,\xi-\tau,\tau)|\, d\xi \leqq [K_1]\ [K_2] \tag{6.16}$$

et

$$\sup_{h,\xi} \int_{T^n_{\tau,h}} K(h,\xi-\tau,\tau)|\, d\tau \leqq [K_1]\ [K_2] . \tag{6.17}$$

On va commencer par (6.16), On a

$$\begin{aligned}
\sup_{h,\tau} \int_{T^n_{\xi,h}} |K|\, d\xi &\leqq \sup_{h,\tau} \int_{T^n_{\xi,h}}\int_{T^n_{\eta,h}} |K_1(h,\xi-\eta,\Theta_\tau)|\ |K_2(h,\eta-\tau,\tau)|\, d\eta d\xi \\
&= \sup_{h,\tau} \int_{T^n_{\eta,h}} |K_2(h,\eta-\tau,\tau)| \left[\int_{T^n_{\xi,h}} |K_1(h,\xi-\eta,\Theta_\tau)|\, d\xi\right] d\eta \\
&= \sup_{h,\tau} \int_{T^n_{\eta,h}} |K_2(h,\eta,\tau)|\, d\eta \int_{T^n_{\xi,h}} |K_1(h,\chi,\Theta_\tau)|\, d\xi \leqq [K_1]\,[K_2].
\end{aligned}$$

Puis, on a:

$$\begin{aligned}
\sup_{h,\xi} \int_{T^n} |K|\, d\tau &\leqq \sup_{h,\xi} \int_{T^n_{\tau,h}}\int_{T^n_{\eta,h}} |K_1(h,\xi-\eta,\Theta_\tau)|\,|K_2(h,\eta-\tau,\tau)|\, d\eta d\tau . \\
&\leqq \sup_{h,\xi} \int_{T^n_{\eta,h}} \sup_{\Theta\in T^n_{\theta,h}} |K_1(h,\xi-\eta,\Theta)| \left[\int_{T^n_{\tau,h}} \sup_{\Theta\in T^n_{\theta,h}} |K_2(h,\eta-\tau,\Theta)|\, d\tau\right] d\eta \\
&= [K_1]\ [K_2],
\end{aligned}$$

ce qui prouve (6.17).

Démonstration du Lemme 6.2. L'inégalité de Peetre donne:

$$|{}^\alpha P(h,\xi,\tau)| \leqq 4^q \int_{T^n_{\eta,h}} \langle\zeta_{\xi-\eta}\rangle^q |\widetilde{a^a}\ {}^h(h,\xi-\eta,\tau)\langle\zeta_\tau\rangle^{|\alpha|-\nu}\langle\zeta_{\eta-\tau}\rangle \cdot$$

$$\cdot\quad |{}^{\widetilde{a}}r^h(h,\eta-\tau,\tau)|\ \langle\zeta_\tau\rangle^{N-\mu-|\alpha|} d\eta .$$

Posant

$$K_1(h,\chi,\tau) = \langle\zeta_\eta\rangle^q \left|\widetilde{a^{\alpha}}^{\,h}(h,\chi,\tau)\right| \langle\zeta_\tau\rangle^{|\alpha|-\nu}$$

$$K_2(h,\chi,\tau) = \langle\zeta_\chi\rangle^q \left|\widetilde{{}^{\alpha}r^h}(h,\chi,\tau)\right| \langle\zeta_\tau\rangle^{N-\mu-|\alpha|} ,$$

et appliquant le lemme 6.1 on obtient pour la famille d'opérateurs ${}^{\alpha}P^h$ l'estimation

$$\| {}^{\alpha}P^h \|_{L_2\to L_2} \leqq 4^q[K_1]^q[K_2] .$$

Puis, compte tenu de (2.5) et (4.7), il vient

$$[K_1] \leqq \left| \tilde{a}_{\langle x\rangle^q\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|-\nu} . \tag{6.18}$$

Pour démontrer le lemme 6.2 il reste a obtenir l'estimation

$$[K_2] \leqq C\left| b_{\langle x\rangle^{q+N}}\right|_{-\mu} . \tag{6.19}$$

Utilisant la formule de Poisson, qui etablit le rapport entre les transformées de Fourrier integrale et discrète, on peut écrire:

$$\widetilde{{}^{a}r^h}(h,\chi,\tau) = \sum_{0\neq\gamma\in\mathbb{Z}^n} [\chi^\alpha - (\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1})^\alpha] b(h,\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1},\tau) .$$

Notant que

$$\sup_{\chi\in T^n_{\chi,h}} \left|\chi^\alpha - (\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1})^\alpha\right| \langle \chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1}\rangle^{-k} \leqq c(\alpha,k)h^{k-|\alpha|} ,\ \forall_k \in \mathbb{Z}^1_+ ,$$

on obtient

$$\left|\widetilde{{}^{a}r^h}(h,\chi,\tau)\right| \leqq C(\alpha,k)h^{k-|\alpha|} \sum_{\alpha\neq\gamma\in\mathbb{Z}^n} \langle\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1}\rangle^k \left| \tilde{b}(h,\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1},\tau)\right| ,$$

$$\forall k\in\mathbb{Z}^1_+$$

de sorte que

$$[K_2] \leqq c(\alpha,k)h^{k-|\alpha|} \sum_{\gamma\in\mathbb{Z}^n} \int_{T^n_{\chi,h}} \langle\zeta_\chi\rangle^q \langle\chi + 2\pi\gamma r^{-1}h^{-1}\rangle^k .$$

$$\cdot \left|\tilde{b}(h,\chi + 2\pi r^{-1}h^{-1},\tau)\right| \langle\zeta_\tau\rangle^{N-\mu-|\alpha|}\, d\chi \leqq$$

$$\leqq c(\alpha,k)h^{k-|\alpha|} \int_{R^n_\chi} \chi^{q+k} \left|\tilde{b}(h,\chi,\tau)\right| \langle\zeta_\tau\rangle^{N-\mu-|\alpha|} d\chi .$$

Posant $k = N$ et notant que

$$h^{N-|\alpha|}\langle\zeta_\tau\rangle^{N-|\alpha|} \leqq c(N,n,h_0) \quad (0 < h \leqq h_0),$$

la constante $c(N,n,h_0)$ ne dépendant que de N,n et h_0, on obtient l'inégalité (6.19) avec une constante c ne dépendant que de N, n et h_0. Le lemme 6.2. est démontré.

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.3. On va avoir besoin de l'expression explicite pour $\tilde{R}_N^h$:

$$\tilde{R}_N^h(h,\chi,\eta,\tau) = \sum_{|\alpha|=N} \frac{1}{\alpha!}\widetilde{a^{\alpha}}^h(h,\chi,\Theta_\tau)(\eta-\tau)^\alpha,$$

ici $\Theta_\tau = \tau + q(\eta-\tau)$.

Utilisant l'identité

$$\chi^\alpha \tilde{b}^h(h,\chi,\tau) = \tilde{b}_\alpha^h(h,\chi,\tau) + \widetilde{{}^a r}^h(h,\chi,\tau),$$

appliquent une fois de plus le lemme 6.1 et raisonnant exactement de la même manière que dans la démonstration du lemme 6.2, on obtient l'estimation cherchée (6.15). Le lemme 6.3 est démontré.

Cela achève la démonstration du théorème 6.1.

Il y a lieu de noter que les opérateurs C_j^h dans la répresentation (6.1) ne sont pas définis de facon unique, quoique le symbole gradué $\sigma_\Gamma(a \circ b)$ est bien défini par les symboles gradués $\sigma_\Gamma(a)$ et $\sigma_\Gamma(b)$. Ainsi il est possible de donner d'autre représentations de la composition $A^h \circ B^h$ analogues à la mise en forme (6.1).

En particulier, lorsque le symbole $a(h,x,\xi)$ de la famille A^h peut être mis sous la forme d'un polynôme de $(\zeta_\xi, \bar{\zeta}_\xi)$, la formule (6.1) peut être remplacée par une autre, cette dernière étant plus commode dans les applications. Notamment, le théorème suivant est valable:

THÉORÈME 6.2. *Sous les hypothéses du théorème 6.1 et sous l'hypothèse supplémentaire que le symbole $a(h,x,\xi)$ de la famille A^h de o.d.f. soit un polynôme de $(\zeta_\xi, \bar{\zeta}_\xi)$, tel que $\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar{\zeta}}^\beta a(h,x,\xi) \in \mathscr{L}_{\nu-|\alpha|-|\beta|}$, la formule suivante est vérifiée*

$$A^h \circ B^h = \sum_{j \geqq 0} C_j^h. \tag{6.21}$$

Ici C_j^h sont des familles de o.d.f. de symboles

$$c_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{(\alpha+\beta)!}(1+ih\zeta_\xi)^\alpha(1-ih\bar{\zeta}_\xi)^\beta \partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar{\zeta}}^\beta a(h,x,\xi) D_{x,h}^\alpha \bar{D}_{x,h}^\beta b(h,x,\xi) \tag{6.22}$$

∂_ζ et $\partial_{\bar{\zeta}}$ désignant respectivemnt les différentiations par rapport à ζ_ξ et $\bar{\zeta}_\xi$, ord $C_j^h = \nu + \mu - j$.

DÉMONSTRATION. Notons que

$$\zeta_{\eta_j} = \zeta_{\tau_j} + (1 + ih_j\zeta_{\tau_j})\zeta_{\eta_j-\tau_j}. \tag{6.23}$$

utilisant la représentation (6.7), la formule (6.23) et le fait que $a(h,x,\xi)$ soit un polynôme de ζ_ξ, $\bar{\zeta}_\xi$, nous obtenons, après une série de calculs élémentaires, les formules (6.21), (6.22).

Notons que si $a(h,x,\xi)$ est une fonction indéfiniment différentiable de $\zeta_\xi, \bar{\zeta}_\xi$ telle que $\partial_\zeta^\alpha \partial_{\bar{\zeta}}^\beta a(h,x,\xi) \in \mathscr{L}_{\nu-|\alpha|-|\beta|}$, on peut obtenir dans ce cas pour la composition $A^h \circ B^h$ la formule (6.1) dans laquelle les symboles des opérateurs C_j^h sont calculés d'après les formules (6.22), et le reste vérifie l'estimation (6.3). Dans ce cas l'évaluation se fait de la même manière que dans la démonstration du théorème 6.1. — Les formules (6.21), (6.22) sont plus commodes dans les applications, vu le fait que la plupart de bonnes approximations des opérateurs différentiels sont des polynômes en ζ_ξ et $\bar{\zeta}_\xi$ et que dans ce cas la somme (6.21) est finie. Un autre avantage que présente l'utilisation des formules (6.21), (6.22), consiste dans le fait que pour leur application il suffit de définir les symboles $a(h,x,\xi)$ et $b(h,x,\xi)$ seulement aux points du réseau $R_{x,h}^n$.

7. Opérateur conjugué

A^h étant une famille de o.d.f., on définit au moyen du produit scalaire (1.1) la famille conjuguée ${}^tA^h$ par l'égalité

$$(A^h u, v)^h = (u, {}^tA^h v)^h, \tag{7.1}$$
$$\forall u, v \in C_0^\infty(R_x^n), \quad \forall h \in (0, h_0).$$

THÉORÈME 7.1. *Soit une famille des o.d.f. A^h de symbole $a(h,x,\xi) \in \mathscr{L}\nu$. Il existe une seule famille des o.d.f., notée ${}^tA^h$, qui vérifie l'égalité* (7.1). *En outre, pour tout $N \in \mathbb{Z}_+^1$, $N \geqq 1$, il existe des familles $C_0^h, \cdots, C_{N-1}^h$ de symboles $c_0(h,x,\xi), \cdots, c_{N-1}(h,x,\xi)$ et une famille R_N^h telles que l'on ait:*

$$ {}^tA^h = \sum_{0 \leqq j \leqq N-1} C_j^h + R_N^h, \quad \operatorname{ord} C_j^h = \nu - j, \tag{7.2}$$

avec

$$c_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} {}^t a_\alpha^\alpha(h,x,\xi), \tag{7.3}$$

la famille R_N^h étant continue de $H_s(0,h_0)$ dans $H_{s-\nu+N}(0,h_0)$ et vérifiant l'inégalité

$$\|R_N^h\|_{H_s \to H_{s-\nu+N}} \leqq c(s,\nu;N,n) \sum_{|\alpha| \leqq N} \left| a_{\langle x \rangle |s|+|N-\nu|+N_{\xi^\alpha}} \right|_{|\alpha|-\nu} . \tag{7.4}$$

On a désigné par ${}^t a(h,x,\xi)$ *la conjuguée de la matrice* $a(h,x,\xi)$. *Pour le symbole gradué* $\sigma_\Gamma({}^tA^h)$ *de la famille conjuguée* ${}^tA^h$ *la formule suivante est vérifiée*

$$\sigma_\Gamma({}^t a) = \sum_{\alpha,j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha {}^t a_j(x,\xi) \tag{7.5}$$

les fonctions matricielles ${}^t a_j(x,\xi)$ *étant conjuguées des termes correspondants du symbole gradué* $\sigma_\Gamma(A^h)$,

$$\sigma_\Gamma(a) = \sum_{j \geqq 0} a_j(x,\xi), \ \operatorname{ord} a_j = s_j, \ s_0 = \nu, \tag{7.6}$$

et les ordres des termes dans le second membre de (7.5) *étant respectivement*:

$$\operatorname{ord}(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha {}^t a_j(x,\xi)) = s_j - |\alpha| . \tag{7.7}$$

DÉMONSTRATION. L'unicité de l'opérateur ${}^tA^h$ ne suscite pas de doutes, vue la densité de $C_0^\infty(R_x^n)$ dans $H_0(0,h_0)$, tandis que son existence est une conséquence immédiate du théorème de Riesz.

La définition (3.1) d'une famille A^h des o.d.f. et la formule de Parseval donnent

$$(A^h u, v)^h = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} \sum_{x \in R_{x,h}} \exp(ix\xi) a(h,x,\xi) \tilde{u}^h(\xi) \overline{v(x)} h_1 \cdots h_n s\xi = (u, {}^tA^h v)^h,$$

avec la notation

$$({}^t\widetilde{A}^h v)^h(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} {}^t\widetilde{a}^h(h,\xi-\eta,\xi) \widetilde{v}^h(\eta) d\eta . \tag{7.8}$$

Maintenant la formule de Taylor

$${}^t\widetilde{a}^h(h,\chi,\xi) = \sum_{|\alpha| \leqq N-1} \frac{(\xi-\eta)^\alpha}{\alpha!} {}^t\widetilde{a}^{\alpha\ b}(h,\chi,\eta) + \widetilde{R}_N^h(h,\chi,\xi,\eta)$$

et les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème (7.2)–(7.4), permettent d'obtenir les formules (7.2), (7.3) et l'inégalité (7.4). Utilisant de nouveau le théorème 2.1, on peut trouver la famille des o.d.f. C^h de symbole gradué (7.5). On déduit sans peine des relations (7.2)–(7.4), que ${}^tA^h - C^h = T_\infty^h$. Cette dernière égalité signifie que $\sigma_\Gamma({}^tA^h)$ coïncide avec le symbole gradué dans le second membre de (7.5). Le théorème 7.1 est prouvé.

Tout comme dans le cas de composition de familles des o.d.f., les familles C_j^h dans les formules (7.2), (7.3) ne sont pas définies de façon unique. Il est plus commode pour les applications d'utiliser une autre variante de la décomposition (7.2), (7.3).

THÉORÈME 7.2. *Sous les hypothèses du théorème 7.1 et sous l'hypothèse supplémentaire que $\sigma_\Gamma(A^h) = a(h,x,\xi)$ soit une fonction indéfiniment différentiable de $(\zeta_\xi, \bar\zeta_\xi)$, telle que $\partial_\zeta^\alpha \bar\partial_\zeta^\beta a\,(h,x,\xi) \in \mathscr{L}_{\nu-|\alpha|-|\beta|}$, la représentation suivante a lieu:*

$$ {}^tA^h = \sum_{0 \leqq j \leqq N-1} C_j^h + R_N^h, \quad \operatorname{ord} C_j^h = \nu - j, \tag{7.9} $$

où les familles C_j^h, $0 \leqq j \leqq N-1$, ont pour symboles les fonctions matricielles $c_j(h,x,\xi)$,

$$ c_j(h,x,\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=j} \frac{1}{(\alpha+\beta)!}(1+ih\zeta_\xi)\,(1-ih\bar\zeta_\xi)^\beta \cdot \\ \cdot\, \partial_\zeta^\alpha \bar\partial_\zeta^\beta D_{x,h}^\alpha \bar D_{x,h}^\beta\, {}^ta(h,x,\xi), \tag{7.10} $$

et la famille R_N^h satisfait à l'inégalité (7.4).

La démonstration de ce théorème est en tous points analogue à celle du théorème 6.2; l'estimation du reste R_N^h peut être obtenue par les mêmes raisonnements que dans la démonstration du théorème 6.1. Notons que lorsque $a(h,x,\xi)$ est un polynôme de $(\zeta_\xi, \bar\zeta_\xi)$, les formules (7.9), (7.10) sont particulièrement commodes, puisque dans ce cas $R_N^h = 0$, pour N suffisamment grand.

8. Inégalité de Gårding

L'analogue discret de l'inégalité de Gårding est particulièrement important pour les applications en analyse numérique, de même qu'il représente un intérêt pour la théorie générale des opérateurs aux différences finies. Notons que sous une forme différente et dans un cas particulier, cette inégalité a été démontré antérieurement dans [6] et traitée de manière plus simple dans [8]. Comme l a été dit ci-dessus, les opérateurs aux différences finies considérés dans les articles cités sont, en substence, des approximations de l'opérateur unité.

Avant de passer à l'énoncé de l'inégalité de Gårding, nous allons munir l'espace $H_s(0,h_0)$ d'une structure hilbertienne, en introduisant pour tout $h \in (0,h_0)$ et pour tout couple de fonctions de maille $u, v \in H_s(0,h_0)$ le produit scalaire

$$ (u,v)_s^h = (2\pi)^{-n} \int_{T^n_{\xi,h}} \langle\zeta_\xi\rangle^{2s} \tilde u^h(\xi) \bar{\tilde v}^h(\xi)\, d\xi\,. \tag{8.1} $$

Pour $s = 0$ le produit scalaire (8.1) coïncide avec (1.1); lorsque s est un entier non-négatif, le produit scalaire définit une topologie équivalente à la topologie donnée par le produit scalaire

$$\sum_{|\alpha|\leq s}\ \sum_{x\in R_{x,h}} {}_n\, D^{\alpha}_{x,h}u(x)\overline{D^{\alpha}_{x,h}v(x)}h_1\cdots h_n$$

et cela uniformément par rapport au paramètre $h\in(0,h_0)$.

Pour simplifier nous supposons dans ce paragraphe que les familles des o.d.f. vérifient la condition: $s_0 - s_1 \geqq 1$, s_0 et s_1 étant respectivement les ordres des deux premiers termes des symboles gradués des opérateurs aux différences finies considérés.

THÉORÈME 8.1. *Soit une famille P^h des o.d.f. d'ordre s_0, de symbole $p(h,x,\xi)$ et de symbole gradué*

(8.2) $$\sigma_\Gamma(P^h) = \sum_{j\geq 0} p_j(x,\xi),\ \operatorname{ord} p_j = s_j,\ s_0 - s_1 \geqq 1.$$

Supposons que $p_0(x,\xi)$ soit une matrice hermitienne non-négative en tout point $(x,\xi)\in R^n_x\times(T^n_\xi\{0\})$.

Alors l'inégalité suivante est vérifiée

(8.3) $$\operatorname{Re}(P^h u,u)^h_s \geqq -c\,\|u\|^2_{(s_0-1)/2+s,h};$$

ici la constante c ne dépend pas de h et u.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord notons que l'on peut se borner à considérer seulement le cas où $s = s_0 = 0$. En effet, notant Λ^r_h la famille des o.d.f. de symbole $\langle\zeta_\xi\rangle^r$ et posant

$$v = \Lambda_h^{s+s_0/2}u,$$

on est conduit à la necessité de démontrer l'inégalité

(8.4) $$\operatorname{Re}(Q^h v,v)^h_0 \geqq -c\,\|v\|^2_{-1/2\ h},$$

avec l'opérateur Q^h suivant

$$Q^h = \Lambda_h^{s-s_0/2}P\,\Lambda_h^{-s-s_0/2}$$

Q^h étant d'ordre nul et, vu le théorème 6.1 sur la composition, la partie principale $q_0(x,\xi)$ du symbole gardué $\sigma_\Gamma(Q^h)$ étant

$$q_0(x,\xi) = |\omega_\xi|^{-s_0}p_0(x,\xi).$$

Notons, en outre, que sans restreindre la généralité, l'on peut supposer que le symbole $p(h,x,\xi)$ de P^h soit également une matrice hermitienne non-négative.

En effet, dans le cas contraire, on pourrait considérer au lieu de P^h une autre famille P_0^h de symbole

$$\phi_\xi h^{-s_0} p_0(x, h\xi).$$

Nous allons donc démontrer l'inégalité (8.3), en supposant que $s = s_0 = 0$ et que e symbole $p(h, x, \xi)$ de la famille P^h soit une matrice hermitienne non-négative.

Soit $\phi(\Theta)$ une fonction paire non-négative de $C_0^\infty(R_\Theta^n)$ à support dans la boule $|\Theta| \leqq 1$; on suppose, en outre, que

$$\int_{R_\theta^n} \phi^2(\Theta) d\Theta = 1. \tag{8.5}$$

Posons

$$\phi_h(\xi, \lambda) = \langle\zeta_\xi\rangle^{-n/4} \phi(\langle\zeta_\xi\rangle^{-1/2}(\xi - \lambda)) \tag{8.6}$$

et

$$\Phi(h, \xi, \lambda) = \sum_{\gamma \in \mathbb{Z}^n} \phi_n(\xi + 2\pi\lambda r^{-1} h^{-1}, \lambda). \tag{8.7}$$

Introduisons le symbole "régularisé" $a(h, x, \xi)$,

$$a(h, x, \xi) = \int_{T_{\gamma, h}^n} p(h, x, \lambda) \Phi^2(h, \xi, \lambda) d\lambda, \tag{8.8}$$

et notons que pour h_0 suffisamment petit on a pour tout $h \in (0, h_0)$ l'identité

$$a(h, x, \xi) = \int_{R_\lambda^n} p(h, x, \lambda) \phi_h^2(\xi, \lambda) d\lambda = \int_{R^n} p(h, x, \xi - \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta) \phi^2(\Theta) d\Theta \tag{8.8$'$}$$

vu que $\operatorname{supp} \phi(\Theta) \subset \{|\Theta| \leqq 1\}$ et que $\phi_h(\xi + 2\pi\gamma r^{-1} h^{-1}, \lambda) = \phi_h(\xi, \lambda - 2\pi\gamma r^{-1} h^{-1})$.

Introduisons également le symbole "double":

$$b(h, \xi, x, \eta) = \int_{T_{\lambda, h}^n} \Phi(h, \xi, \lambda) p(h, x, \lambda) \Phi(h, \eta, \lambda) d\lambda. \tag{8.9}$$

Notons par A^h la famille des o.d.f. de symbole $a(h, x, \xi)$ et faisons correspondre au symbole "double" $b(h, x, \xi, \eta)$ une famille B^h des o.d.f. selon la formule

$$(\widetilde{B^h u})^h(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\lambda, h}^n} \tilde{b}^h(h, \xi, \xi - \eta, \eta) \tilde{u}^h(\eta) d\eta, \tag{8.10}$$

ou l'on a noté:

$$\tilde{b}^h(h, \xi, \chi, \eta) = F_{x \to \chi, h} b(h, \xi, x, \eta).$$

On vérifie aisément que le symbole $\beta(h, x, \eta)$ de B^h est donné par la formule

$$\beta(h, x, \eta) = (2\pi)^{-n} \int_{T_{\xi, \eta}^n} \exp(ix\xi) \tilde{b}^h(h, \xi, \xi - \eta, \eta) d\xi. \tag{8.11}$$

Nous allons avoir besoin de trois lemmes dont les démonstrations seront données plus tard.

LEMME 8.1. *La famille B^h de symbole* (8.11) *est autoadjointe par rapport au produit scalaire* (1.1) *et, de plus, on a*

$$(B^h u, u)_0^h \geqq 0, \quad \forall u \in H_0(0, h_0). \tag{8.12}$$

LEMME 8.2. *Il existe une constante c indépendante de h et u telle que l'on ait*

$$\left| \mathrm{Re}([A^h - P^h]u, u)_0^h \right| < c \| u \|^2_{-1/2,h}. \tag{8.13}$$

LEMME 8.3. *Il existe une constante c indépendante de h et u telle que l'on ait*

$$\left| ([B^h - \mathrm{Re}\, A^h]u, u)_0^h \right| \leqq c \| u \|^2_{-1/2,h}. \tag{8.14}$$

On déduit immédiatement des inégalités (8.12)–(8.14) le résultat cherché:

$$\begin{aligned} - \mathrm{Re}(P^h u, u)_0^h &\leqq ([B^h - \mathrm{Re}\, P^h]u, u)_0^h \leqq \\ &\leqq \left| [B^h - \mathrm{Re}\, A^h]u, u)_0^h \right| + \left| \mathrm{Re}([A^h - P^h]u, u)_0^h \right| \leqq \\ &\leqq c \| u \|^2_{-1/2,h}. \end{aligned}$$

Il reste à démontrer les lemmes 8.1–8.3.

DÉMONSTRATION DU LEMME 8.1. Le symbole $p(h, x, \xi)$ étant une matrice hermittienne non-négative on a, vues la formule (8.9) et les propriétés de la fonctions Φ:

$${}^t b(h, \eta, x, \xi) = b(h, \xi, x, \eta), \quad b(h, \xi, x, \eta) \geqq 0 \tag{8.15}$$

où, comme d'habitude, l'on a noté ${}^t b(h, \eta, x, \xi)$ la matrice conjuguée de $b(h, \eta, x, \xi)$.

Les relations (8.15) donnent:

$$\int_{T^n_{\xi,h}} \int_{T^n_{\eta,h}} \overline{\exp(ix\xi)\tilde{u}^h(\xi)} b(h, \xi, x, \eta) \exp(ix.\eta) \tilde{u}^h(\eta) d\eta d\xi \geqq 0. \tag{8.16}$$

Multipliant les deux membres de l'égalité (8.16) par $h_1, \cdots, h_n$ et sommant par rapport à $x \in R^n_{x,h}$, on obtient, vues les relations (8.15) et la formule de Parseval, l'inégalité cherchée:

$$(B^h u, u)_0^h = (u, B^h u)_0^h \geqq 0$$

ce qui prouve le lemme 8.1.

DÉMONSTRATION DU LEMME 8.2. En substance, on est ramené au problème d'estimer les normes des opérateurs intégraux de $L_2(T^n_{\xi,n})$ dans lui-même, ayant pour les noyaux les fonctions matricielles:

$$\text{(8.17)}\qquad \begin{cases} k(h,\xi,\eta) = \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{4}}[\tilde{a}^h(h,\xi-\eta,\eta) - \tilde{p}^h(h,\xi-\eta,\eta)]\langle\zeta_n\rangle^{\frac{1}{4}} \\ {}^tk(h,\xi,\eta) = \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{4}}[{}^t\tilde{a}^h(h,\xi-\eta,\eta) - \tilde{p}^h(h,\xi-\eta,\xi)]\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{4}}. \end{cases}$$

L'inégalité de Peetre donne

$$\text{(8.18)}\qquad |k(h,\xi,\eta)| \leqq 2^{\frac{1}{4}}\langle\zeta_{\xi-\eta}\rangle^{\frac{1}{4}}|\tilde{a}^h - \tilde{p}^h|\langle\zeta_\eta\rangle.$$

Appliquant la formule de Taylor avec le centre au point η et le reste du deuxième ordre sous la forme intégrale au symbole $p(x,h,\eta - \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta)$, on obtient, vus la formule (8.8)' et le fait que $\phi^2(\Theta)$ soit une fonction paire:

$$\text{(8.19)}\qquad a(h,x,\eta) - p(h,x,\eta) = \int_{R^n_\Theta} [p(h,x,\eta - \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta) - p(h,x,\eta)]\phi^2(\Theta)d\Theta$$

$$= \int_{R^n_\Theta}\int_0^1 \langle\zeta_\eta\rangle(1-t)\sum_{|\alpha|=2} p^{\alpha}(h,x,\eta - t\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta)\Theta^\alpha\phi^2(\Theta)dt\,d\Theta.$$

Il est facile de vérifier que

$$\text{(8.20)}\qquad \sup_{h,\eta,|t\Theta|\leqq 1} \langle\zeta_\eta\rangle\langle\zeta_{\eta-t\langle\zeta_n\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta}\rangle^{-1} \leqq C$$

avec une constante C.

En effet, il suffit de démontrer (8.20) pour η vérifiant les conditions

$$\eta \in T^n_{\eta,h},\quad \langle\zeta_\eta\rangle \geqq A$$

avec une constante A suffisamment grande.

Posant dans ce cas

$$\text{(8.21)}\qquad \xi = \eta - t\langle\zeta_n\rangle^{\frac{1}{2}}\Theta$$

et notant que pour $t|\Theta| \leqq 1$ le jacobien $D\xi/D\eta$ de la transformation (8.21) vérifie avec une constante C l'inégalité

$$\left|\frac{D\xi}{D\eta} - E\right| \leqq C\langle\zeta_\eta\rangle^{-\frac{1}{2}},$$

on est conduit à la conclusion que pour A suffisamment grand, la transformation (8.21) possède une transformation inverse: $\eta = \eta(\xi)$ qui vérifie l'inégalité

$$\langle\zeta_{\eta(\xi)}\rangle \leqq C\langle\zeta_\xi\rangle$$

avec une constante C indépendante de h. Cela prouve l'inégalité (8.20).

Utilisant (8.17)–(8.20) et appliquant les mêmes raisonnements que pour l'estimation du reste R_N^h dans la démonstration du théorème 6.1, on obtient pour $k(h,\xi,\eta)$ l'inégalité

$$(8.21)' \qquad \max\left\{\sup_{h,\xi}\int_{T^n_{\eta,h}}|k|\,d\eta,\sup_{h,\eta}\int_{T^n_{\xi,h}}|k|\,d\xi\right\} \leqq$$
$$\leqq c_0\sum_{|\alpha|\leqq 2}\left|p_{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|},$$

avec une constante c_0 dépendant seulement de h_0 et n.

Les mêmes raisonnements permettent d'obtenir l'inégalité (8.21) pour le noyau ${}^tk(h,\xi,\eta)$, probablement, avec une autre constante c_0.

Cela étant et compte tenu du lemme de Schur, on obtient l'estimation (8.13) avec la constante

$$\sum_{|\alpha|\leqq L}\left|p_{\langle x\rangle^{\frac{1}{2}}\xi^\alpha}\right|_{|\alpha|}$$

Le lemme 8.2 est démontré.

Démonstration du Lemme 8.3. Vue la formule de Parseval, on peut réécrire la forme quadratique dans le premier membre de (8.14) sous la forme

$$(8.23) \qquad ([B^h-\operatorname{Re}A^h]u,u)_0^h = \int_{T^n_{\xi,h}}\int_{T^n_{\eta,h}}k(h,\xi,\eta)\tilde{u}^h(\eta)\overline{\tilde{u}^h(\xi)}d\eta d\xi$$

avec

$$(8.24) \qquad 2k(h,\xi,\eta) = 2\tilde{b}^h(h,\xi,\xi-\eta,\eta)-\tilde{a}^h(h,\xi-\eta,\eta)-{}^ta^h(h,\xi-\eta,\xi).$$

Posons $\chi=\xi-\eta$ et notons que, vues les formules (8.8), (8.9) et compte tenu du fait que le symbole $p(h,x,\xi)$ est hermitien, les identités suivantes sont valables:

$$(8.25) \qquad \begin{aligned} \tilde{a}^h(h,\chi,\eta) &= \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta),\\ {}^t\widetilde{a}^h(h,\chi,\xi) &= \tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta+\chi),\\ \tilde{b}^h(h,\xi,\chi,\eta) &= \tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta) = \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta+\chi)\ . \end{aligned}$$

Puis posant

$$\tilde{U}^h(\eta) = \langle\zeta_\eta\rangle^{-\frac{1}{2}}\tilde{u}^h(\eta),$$

on ramène la démonstration de l'inégalité (8.14) à l'estimation dans $L_2(T^n_{\xi,h})$ d'une forme quadratique à noyau

$$(8.26) \qquad G(h,\xi,\eta) = \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}k(h,\xi,\eta)\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\ .$$

On vérifie aisément, utilisant le lemme de Schur, que

$$(8.26)' \qquad \sup_h \left| \int_{T^n_{\xi,h}} \int_{T^n_{\eta,h}} G(h,\xi,\eta)\tilde{U}^h(\eta)\overline{\tilde{U}^h(\xi)}d\eta d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq M \sup_h \int_{T^n_{\xi,h}} |\tilde{U}^h(\xi)|^2 d\xi$$

avec une constante M, donnée par la formule

$$(8.26)'' \quad M = (2\pi)^{-n} \int_{R^n_\chi} \sup_{\eta,h,\xi} \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} |2\tilde{b}(h,\xi,\chi,\eta) - \tilde{a}(h,\chi,\eta) - {}^t\tilde{a}(h,\chi,\xi)| d\chi.$$

Vues les relations (8.24), (8.25), on peut réécrire le noyau G de manière suivante:

$$\begin{aligned}
G(h,\xi,\eta) &= \langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}}\{\tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta) - \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta) + \\
&\quad + \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta+\chi) - \tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta+\chi)\}\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} = \\
&= \{[\tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta)\langle\zeta_{n+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} - \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta)\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}]\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta)[\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}}]\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}\} + \\
&\quad + \{[\tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta+\chi)\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} - \tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta+\chi)\langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \tilde{b}^h(h,\eta+\chi,\chi,\eta+\chi)[\langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}]\langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} \\
&= G_1 + G_2 + G_3 + G_4.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Puis, il est évident que:

$$G_1 = \int_0^1 \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}[\tilde{b}^h(h,\eta+t\chi,\chi,\eta)\langle\zeta_{\eta+t\chi}\rangle^{\frac{1}{2}}]dt,$$

$$G_3 = -\int_0^1 \langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}[\tilde{b}^h(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+\chi)\langle\zeta_{\eta+t\chi}\rangle^{\frac{1}{2}}]dt\ .$$

Utilisant une fois de plus la formule de Leibniz-Newton, on obtient:

$$(8.28) \quad G_1 + G_3 =$$

$$= -\int_0^1 \int_0^1 \frac{d}{ds}\{\langle\zeta_{\eta+s\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt}[\langle\zeta_{\eta+t\chi}\rangle^{\frac{1}{2}}\tilde{b}(h,\eta+t\chi,\eta+s\chi)]\}\, dtds\ .$$

Pour plus de commoditié introduisont les notations:

$$(8.29) \qquad \langle\zeta_{\eta+t\chi}\rangle = \langle\zeta_\cdot\rangle$$

$$\partial_\xi^\alpha\partial_\eta^\beta\tilde{b}^h(h,\xi,\chi,\eta) = \widetilde{b^{\alpha,\beta\, h}}(h,\xi,\chi,\eta)\ .$$

Désignant par Φ la fonction sous le signe d'intégrale dans le second membre de (8.28), différentiant, utilisant (8.29) et notant que

$$\frac{d}{dt}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\sum_{|\alpha|=1}(\zeta_t^\alpha + \bar{\zeta}_t^\alpha)\chi^\alpha, \tag{8.30}$$

on trouve

$$\begin{aligned}\Phi = & -\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\widetilde{b^{\alpha,\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi)\chi^\alpha\chi^\beta - \\ & -\frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_s^\beta+\bar{\zeta}_s^\beta)\widetilde{b^{\alpha,0}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi)\chi^\alpha\chi^\beta - \\ & -\frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_t^\alpha+\bar{\zeta}_t^\alpha)\widetilde{b^{0,\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi)\chi^\alpha\chi^\beta - \\ & -\frac{1}{16}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_t^\alpha+\bar{\zeta}_t^\alpha)(\zeta_s^\beta+\bar{\zeta}_s^\beta)\times \\ & \qquad \tilde{b}^h(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi)\chi^\alpha\chi^\beta.\end{aligned} \tag{8.31}$$

Vue la formule de Poisson (cf. [2]), on peut écrire pour tout symbole double $C(h,\xi,x,\eta)$:

$$\tilde{C}^h(h,\xi,\chi,\eta)\chi^\alpha = \tilde{C}^h_\alpha(h,\xi,\chi,\eta) + Q_\alpha(\tilde{C}^h), \tag{8.32}$$

avec

$$Q_\alpha(\tilde{C}^h) = -\sum_{0\neq\gamma\in\mathbb{Z}^n}\tilde{C}^h(h,\xi,\chi+2\pi\gamma r^{-1}h^{-1},\eta)(\chi+2\pi\gamma r^{-1}h^{-1})^\alpha \tag{8.33}$$

et comme d'habitude,

$$\tilde{C}^h_\alpha(h,\xi,\chi,\eta) = F_{x\to\chi,h}(D_x^\alpha C(h,\xi,x,\eta)),$$
$$\gamma r^{-1}h^{-1} = (\gamma_1 r_1^{-1}h^{-1},\cdots,\gamma_n r_n^{-1}h^{-1}).$$

Maintenant on peut réécrire (8.31) sous la forme:

$$\begin{aligned}\Phi = & -\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}\widetilde{b^{\alpha,\beta}_{\alpha+\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi) - \\ & -\frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_s^\beta+\bar{\zeta}_s^\beta)\widetilde{b^{\alpha,0}_{\alpha+\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi) \\ & -\frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_t^\alpha+\bar{\zeta}_t^\alpha)\widetilde{b^{0,\beta}_{\alpha+\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi,\eta+s\chi) \\ & -\frac{1}{16}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_t^\alpha+\bar{\zeta}_t^\alpha)(\zeta_s^\beta+\bar{\zeta}_s^\beta)\widetilde{b_{\alpha+\beta}}^{h}(h,\eta+t\chi,\chi, \\ & \qquad \eta+s\chi) \\ & -\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_t\rangle^{\frac{1}{2}}\sum_{|\alpha|=|\beta|=1}Q_{\alpha+\beta}(\widetilde{b^{\alpha,\beta}}^h) - \frac{1}{4}\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2} \\ & \sum_{|\alpha|=|\beta|=1}(\zeta_s^\beta+\bar{\zeta}_s^\beta)Q_{\alpha+\beta}(\widetilde{b^{\alpha,0}}^h) -\end{aligned} \tag{8.34}$$

$$- \frac{1}{4}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (\zeta_t^\alpha + \bar{\zeta}_t^\alpha) Q_{\alpha+\beta}(\widetilde{b^{0,\beta^h}}) -$$

$$- \frac{1}{16}\langle\zeta_t\rangle^{-3/2}\langle\zeta_s\rangle^{-3/2} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} (\zeta_t^\alpha + \bar{\zeta}_t^\alpha)(\zeta_s^\beta + \bar{\zeta}_s^\beta) Q_{\alpha+\beta}(\tilde{b}^h).$$

Si l'on veut utiliser (8.26)′ pour estimer la forme quadratique à noyau (8.26), il faut estimer supérieurement la constante M, définie par (8.26)″ ce qui conduit, à son tour, à la nécessité d'evaluer l'expression

$$\int_{R\chi} \int_0^1 \int_0^1 \sup_{h,\xi,\eta} |\Phi| \, ds \, dt \, d\chi.$$

Vue l'inégalité (4.7), on obtient pour les intégrales des quatres premières sommes dans l'expression de Φ par la formule (8.34) la majorante suivante:

$$\int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi,\eta} \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} |\widetilde{b^{\alpha,\beta}_{\alpha+\beta}}(h,\xi,\chi,\eta)| \, d\chi + \tag{8.35}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi,\eta} \langle\zeta_\xi\rangle^{\frac{1}{2}}\langle\zeta_\eta\rangle^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} |\widetilde{b^{\alpha,0}_{\alpha+\beta}}(h,\xi,\chi,\eta)| \, d\chi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi,\eta} \langle\zeta_\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} |\widetilde{b^{0,\beta}_{\alpha+\beta}}(h,\xi,\chi,\eta)| \, d\chi +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi,\eta} \langle\zeta_\xi\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle\zeta_n\rangle^{-\frac{1}{2}} \sum_{|\alpha|=|\beta|=1} |\widetilde{b_{\alpha+\beta}}(h,\xi,\chi,\eta)| \, d\chi.$$

Intégrant les restes $Q_\alpha(\tilde{C}^h)$ par rapport à χ et évaluant les intégrales de la même manière que dans la démonstration du théorème 6.1., on obtient pour eux une estimation dont le second membre est le produit de la majorante (8.35) par une constante indépendante de h.

Maintenant on va estimer les intégrales des fonctions G_2 et G_4 dans (8.27). Notant que

$$|\langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}| \leqq \langle\zeta_\eta\rangle^{-\frac{1}{2}}\langle\zeta_\chi\rangle, \tag{8.36}$$

il vient:

$$|G_2| = |\tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta)| \, |\langle\zeta_{\eta+\chi}\rangle^{\frac{1}{2}} - \langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}}|\langle\zeta_\eta\rangle^{\frac{1}{2}} \leqq$$
$$\leqq |\tilde{b}^h(h,\eta,\chi,\eta)|\langle\zeta_\chi\rangle \leqq \langle\chi\rangle|\tilde{b}(h,\eta,\chi,\eta)|.$$

La dernière inégalité donne

$$(8.37) \qquad \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\xi,\eta} |G_2| \, d\chi \leqq \int_{R^n_\chi} \sup_{h,\eta} |\tilde{b}_{\langle x \rangle}(h,\eta,\chi,\eta)| \, d\chi \, .$$

On obtient de la même manière l'estimation (8.37) pour G_4 dans (8.27).

Finalement, la constante M donnée par (8.26)″ est majorée par la somme de la majorante (8.35) (multipliée par une constante) et de la majorante (8.37) multipliée par deux. Puis notant que pour $h \leqq h_0$, h_0 étant suffisamment petit, on a

$$\int_{T^n_{\lambda,h}} \langle \zeta_\xi \rangle | \partial_\xi \Phi(h,\xi,\lambda)|^2 d\lambda = \int_{R^n_\lambda} \langle \zeta_\xi \rangle^{\frac{1}{2}} | \partial_\xi (\langle \zeta_\xi \rangle^{-n/4} \phi(\langle \zeta_\xi \rangle^{-\frac{1}{2}}(\xi - \lambda)))|^2 \, d\lambda$$

et que

$$\sup_{h,\xi} \int_{R^n_\lambda} \langle \zeta_\xi \rangle^{\frac{1}{2}} | \partial_\xi (\langle \zeta_\xi \rangle^{-n/4} \phi(\langle \zeta_\xi \rangle^{-\frac{1}{2}}(\xi - \lambda)))|^2 \, dy < \infty$$

on peut majorer la constante (8.35), vues la formule (8.9) et l'inégalité de Schwartz, par la quantité

$$(8.38) \qquad C_0 \, | \tilde{p}_{\langle x \rangle^2} |_0 \, ,$$

ici la constante C_0 ne dépend que de h_0 et n.

Puis notant que pour $h \leqq h_0$, h_0 étant suffisamment petit, on a l'égalité

$$\int_{T^n_{\lambda \cdot h}} \Phi^2(h,\xi,\lambda) d\lambda = \int_{R^n_\lambda} \phi_h^2(\xi,\lambda) d\lambda = 1$$

et utilisant la formule (8.8) et la première des identités (8.25), on peut évaluer supérieurement l'intégral dans le second membre de (8.37) par la quantité

$$(8.39) \qquad C_0 | \tilde{p}_{\langle x \rangle^2} |_0 \, ,$$

où C_0 est une constante qui ne dépend que de h_0 et n.

Ainsi, la constante M dans (8.26)″ est bornée supérieurement par une majorante du type (8.39); vue l'inégalité (8.26)′, cela donne l'inégalité cherchée (8.14) avec une constante du même type (8.38). Le lemme 8.3 est démontré.

Cela achève la démonstration du théorème 8.1.

Bibliographie

1. L. S. Frank, *Difference operators in convolutions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **8** (1968), No. 2.

2. L. S. Frank, *Spaces of net functions*, Mat. Sb (n. s.), **86** (128) (1971) 2(10).

3. K. O. Friedrichs, *Pseudo-differential operators, an introduction*, Lecture Notes with the assistance of R. Valliancourt, Courant Institute of Mathematics and Science, New York University, 1968.

4. L. Hörmander, *Algebra of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965).

5. J. J. Kohn and L. Nirenberg, *Algebra of pseudodifferential operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965).

6. P. D. Lax and L. Nirenberg, *On the stability for difference schemes: a sharp form of Gårding's inequality*, Comm. Pure Appl. Math. **19** (1966), 437–492.

7. V. Thomée and B. Westergren, *Elliptic difference equations and interior regularity*, Numer. Math. **11** (1968), 196–210.

8. R. Vaillancourt, *A simple proof of Lax-Nirenberg theorems*, Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 151–163.

9. M. Yamaguti and T. Nogi, *An algebra of pseudo difference schemes and its application*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser A. **3** (1967), 151–166.

The Hebrew University of Jerusalem